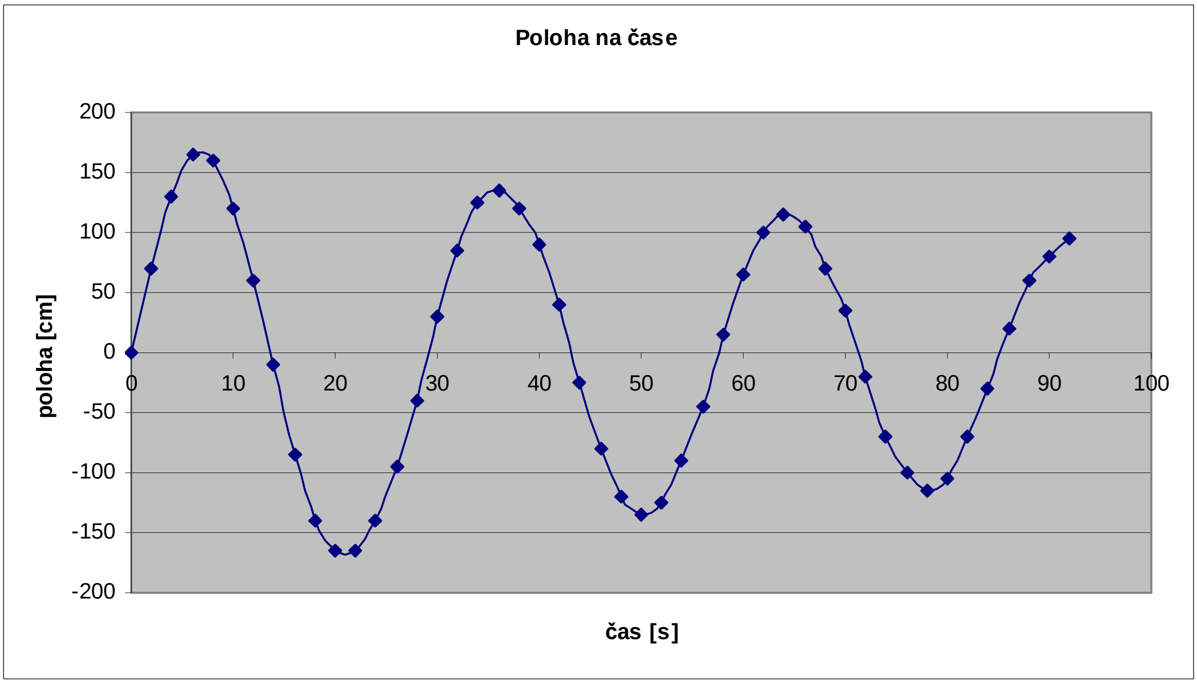
3.1.2 Harmonický pohyb

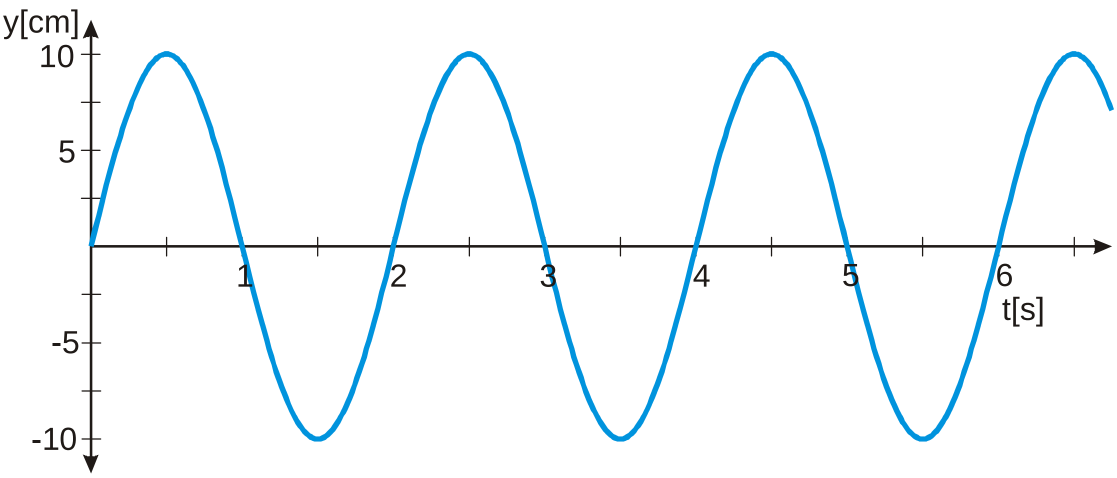
Předpoklady: 3101

Graf závislosti výchylky koštěte na čase:

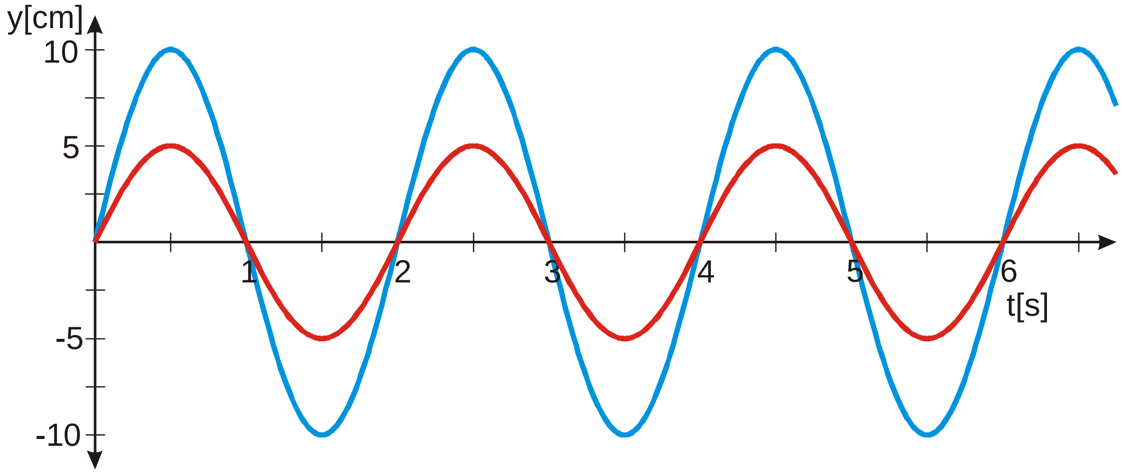


U některých periodických pohybů graf závislosti výchylky na čase přibližně odpovídá grafům funkcí sinus a kosinus (v reálných pohybech se výchylka na rozdíl do funkcí sinus a cosinus zmenšuje) $\Rightarrow$ v ideálním případě by byl stejný $\Rightarrow$ v takovém případě by se jednalo o **harmonický kmitavý pohyb.**

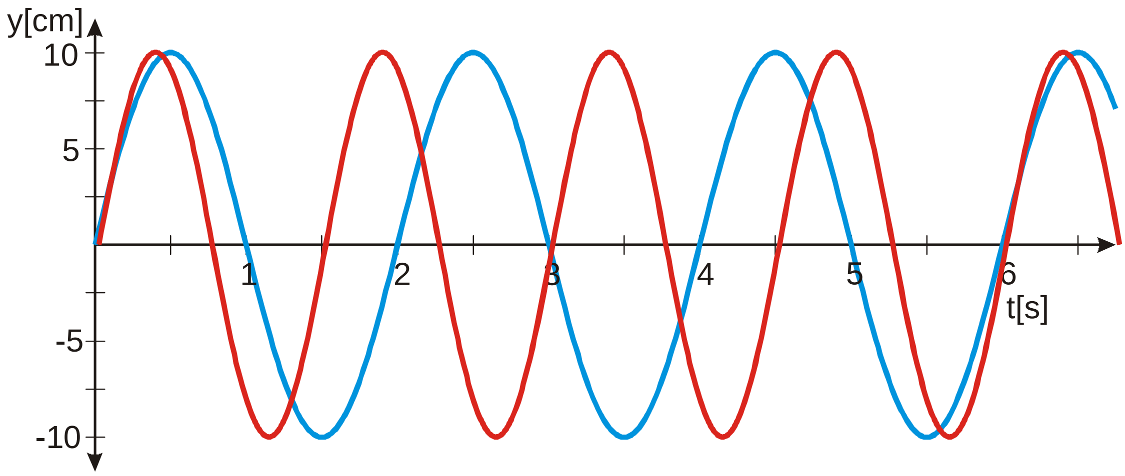
Př. 1: Nakresli graf závislosti výchylky na čase u kyvadla pokud se kývá s periodou 2 sekundy a s maximální výchylkou 10 cm. Předpokládej harmonický pohyb kyvadla.



Př. 2: Do předchozího obrázku doplň graf pohybu kyvadla, které se kývá se stejnou periodou 2 s, ale s poloviční maximální výchylkou 5 cm.



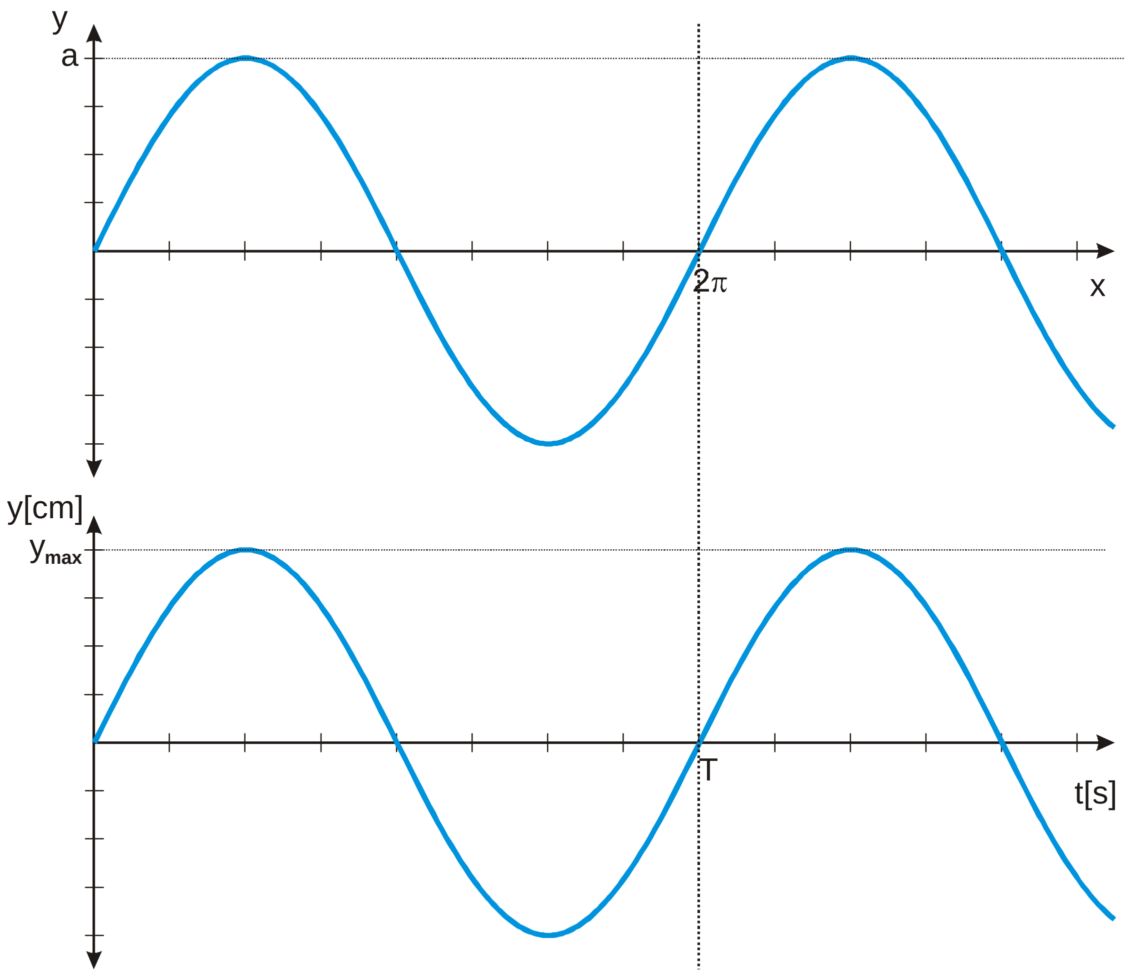
Př. 3: Nakresli do jednoho obrázku grafy závislosti výchylky na čase u dvou kyvadel. První se kývá periodou 2 sekundy a s maximální výchylkou 10 cm, druhé s periodou 1,5 sekundy a stejnou maximální výchylkou. Předpokládej harmonický pohyb kyvadel.



Př. 4: Z výsledků předchozích příkladů urči jak ovlivňuje tvar grafu výchylky na čase:
a) hodnota maximální výchylky b) perioda pohybu.

Hodnota maximální výchylky určuje výšku grafu.
Perioda pohybu určuje délku jedné vlnovky grafu.

Chceme najít rovnici, která popisuje předchozí grafy a říká, ve kterém místě se v daném okamžiku kyvadlo nachází (jaká je jeho okamžitá výchylka).
Budeme srovnávat graf výchylky kyvadla s grafem funkce $y = \sin x$.



Graf funkce: $y = a \sin x$ (číslo a určuje výšku grafu, x je proměnná, na které závisí hodnoty y)

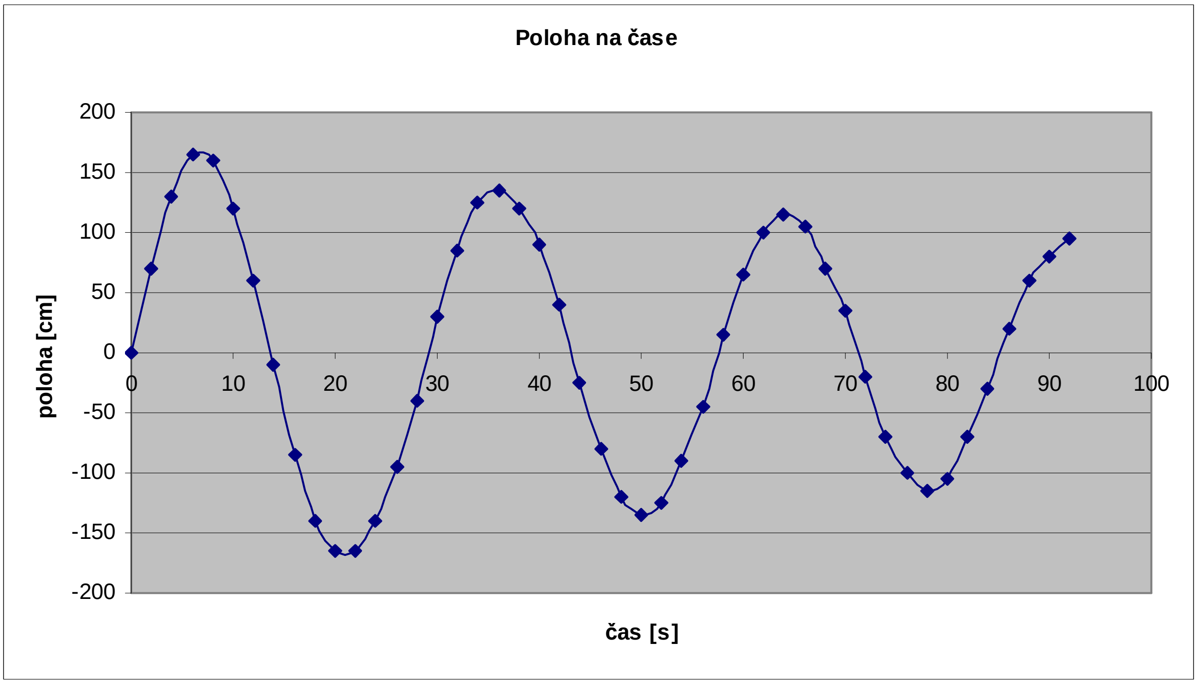
Graf výchylky: $y = y_{\max} \sin(\square t)$

- Výšku grafu určuje maximální výchylka $y_{\max}$.
- Proměnou, na které výchylka závisí, je čas t.
- Čas uvnitř sinu musíme násobit nějakým výrazem $\square$, abychom zajistili, že pro $t = T$ bude končit první vlnovka a začínat druhá (jako u funkce $y = a \sin x$ pro $x = 2\pi$).

Jak určit výraz označený $\square$?
Pro $t = T$ končí první vlnovka a začíná druhá $\Rightarrow$ platí $\square T = 2\pi$ (když dosadíme do rovnice $y = y_{\max} \sin(\square t)$ $t = T$, musíme počítat sin ze 2π, aby končila první vlnovka a začínala druhá).
$\square T = 2\pi$
$\square = \dfrac{2\pi}{T}$

Okamžitá výchylka harmonicky kmitajícího tělesa je dána rovnicí $y = y_m \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ (základní rovnice harmonického kmitání).

Základní rovnici harmonického kmitání můžeme upravit do tvaru: $y = y_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$. Po dosazení $t = T$ (zjišťujeme stav na konci první periody) $y = y_m \sin\left(2\pi \frac{T}{T}\right) = y_m \sin(2\pi \cdot 1)$.
Z rovnice je zřejmé, že v okamžiku $t = T$ se oscilátor nachází na konci první periody.



Př. 5: Z grafu zaznamenávajícího pohyb koštěte urči periodu a maximální výchylku (útlum zanedbej tím, že za maximální výchylku zvolíš maximální výchylky přibližně v polovině pohybu) a sestav rovnici harmonického pohybu.
Do rovnice dosaď časy, pro které máš naměřené výsledky a srovnej spočtené hodnoty s naměřenými.

$y_m = 140\,\text{cm}$

3 kmity … 85 sekund $\Rightarrow T = \frac{85}{3} = 28{,}3\,\text{s}$

$$y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$y = 140 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{28{,}3} \cdot t\right)$$

Dosadíme za t časy, pro které máme naměřené polohy koštěte a které jsou v rozmezí 40 – 60 sekunda (v té době mělo koště maximální výchylku kolem 140 cm) a porovnáme výsledky výpočtu s naměřenými hodnotami.

$t = 40\,\text{s}$ $\quad y = 140 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{28{,}3} \cdot 40\right) = 72\,\text{cm}$ Hodnota v tabulce 90 cm.

$t = 42\,\text{s}$ $\quad y = 140 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{28{,}3} \cdot 42\right) = 14\,\text{cm}$ Hodnota v tabulce 40 cm.

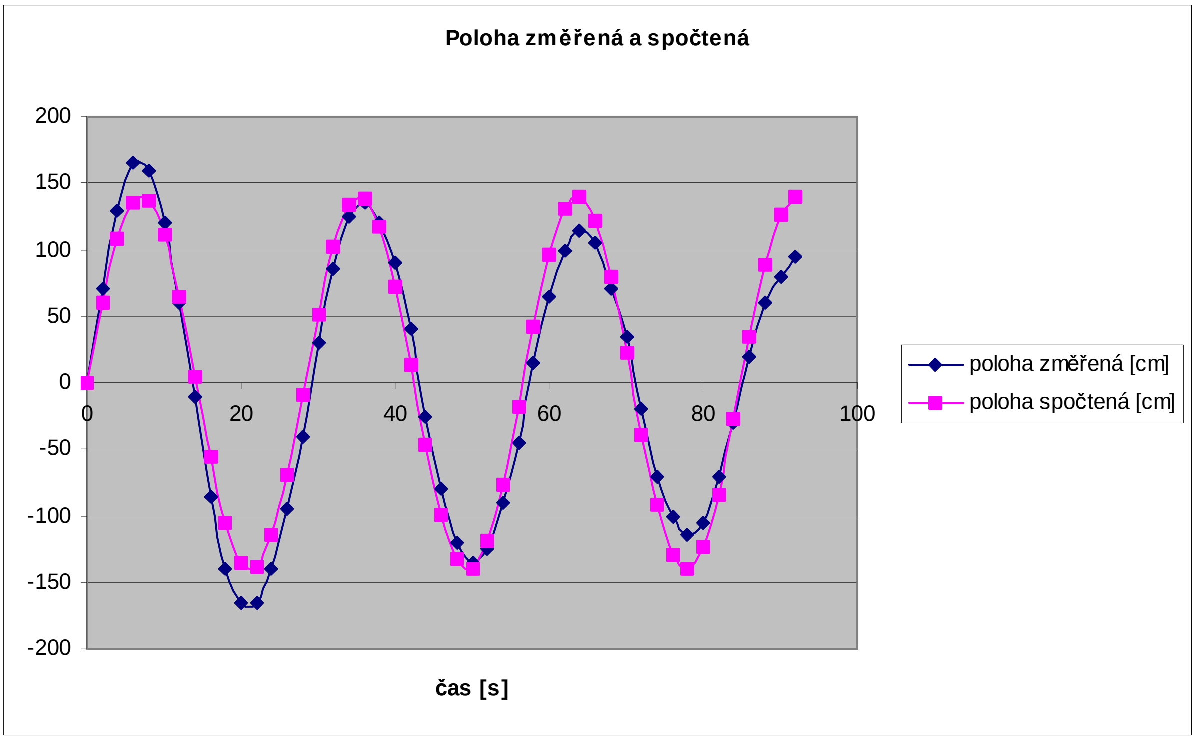
$t = 50\,\text{s}$ $\quad y = 140 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{28,3} \cdot 50\right) = -139\,\text{cm}$ $\quad$ Hodnota v tabulce -135 cm.

$t = 60\,\text{s}$ $\quad y = 140 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{28,3} \cdot 60\right) = 96\,\text{cm}$ $\quad$ Hodnota v tabulce 65 cm.

Ačkoliv si hodnoty zcela neodpovídají, je zřejmé, že rovnice pohyb koštěte přibližně předpovídá.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je potřeba upozornit studenty, aby při zadávání hodnot do kalkulačky zkontrolovali, jestli ji mají přepnutou do módu R (radiány). Většinou to tak není, protože častěji studenti určují hodnoty goniometrických funkcí z úhlů zadávaných ve stupních.

Ještě lépe je to vidět z grafu, srovnávajícího hodnoty naměřené a vypočtené z naší rovnice.



Př. 6: Okamžitá výchylka kyvadla je popsána rovnicí $y = 3\sin(\pi t)$. Urči maximální výchylku kyvadla a jeho periodu.

Rovnici $y = 3\sin(\pi t)$ srovnáme s obecným tvarem rovnice pro harmonický pohyb

$$y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right).$$

$$y = 3\sin\left(\frac{2\pi}{2} t\right)$$

$$y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$\Rightarrow$ je vidět, že platí: $y_m = 3\,\text{m}$, $T = 2$.

Př. 7: Okamžitá výchylka kyvadla je popsána rovnicí $y = 0,05\sin(3t)$. Urči maximální výchylku kyvadla a jeho periodu. Z vypočtených hodnot odhadni hodnotu okamžité výchylky v čase $t = 2\,\mathrm{s}$. Odhad ověř výpočtem.

Rovnici $y = 0,05\sin(3t)$ srovnáme s obecným tvarem rovnice pro harmonický pohyb $y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$.

$$\begin{aligned} y &= 0,05\sin(3t) \\ y &= y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \end{aligned} \Rightarrow \text{ je vidět, že platí: } y_m = 0,05\,\mathrm{m},\ \frac{2\pi}{T}t = 3t.$$

Dopočteme periodu: $\frac{2\pi}{T}t = 3t$.

$\frac{2\pi}{T} = 3 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{s} = 2,1\,\mathrm{s}$

Odhad okamžité výchylky: V čase 2s se kyvadlo nachází v malé záporné výchylce (za 0,1 sekundy se má vrátit do počáteční polohy).

Výpočet okamžité výchylky pro $t = 2\,\mathrm{s}$: $y = 0,05\sin(3t) = 0,05\sin(3\cdot 2)\,\mathrm{m} = -0,014\,\mathrm{m}$

Malá záporná výchylka odpovídá odhadu, neboť kyvadlo se nachází na konci první periody.

Výchylku harmonického pohybu můžeme vyjádřit i pomocí **frekvence** $f = \frac{1}{T}$.

$y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = y_m \sin\left(2\pi\frac{1}{T}\cdot t\right) = y_m \sin(2\pi f\cdot t)$ - rovnice harmonického pohybu s frekvencí.

Ještě jednodušší výraz uvnitř sinu získáme pokud použijeme **úhlovou frekvenci** (u kruhového pohybu jsme ji říkali úhlová rychlost) $\omega = 2\pi f$.

$y = y_m \sin(2\pi f\cdot t) = y_m \sin(\omega t)$ - tento způsob zápisu rovnice harmonického pohybu je nejčastější.

Součin ωt má význam úhlu, značíme ho φ a říkáme mu **fáze kmitavého pohybu**.

Př. 8: Struna na kytaře kmitá s frekvencí 440 Hz (komorní a^1). Urči periodu a úhlovou frekvenci jejího pohybu a napiš rovnici jejího harmonického kmitání, pokud je její maximální výchylka 2 mm.

$f = 440\,\mathrm{Hz}$ $\quad y_m = 2\,\mathrm{mm} = 0,002\,\mathrm{m}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{440}\,\mathrm{s} = 0,0023\,\mathrm{s}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi 440 = 880\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 2765\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Rovnice harmonického kmitání: $y = y_m \sin(\omega t) = 0,002\sin(2765t)$

Př. 9: (domácí) Z mechaniky již víme, že v grafu závislosti polohy na čase jsou schovány i grafy časových závislostí rychlosti a zrychlení. Zkus do jednoho obrázku nakreslit pro pohyb koštěte všechny tyto tři grafy.

Řešení příkladu je uvedeno na počátku příští hodiny.

Shrnutí: Okamžitou výchylku harmonického kmitavého pohybu můžeme popisuje rovnice $y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = y_m \sin(\omega t)$.